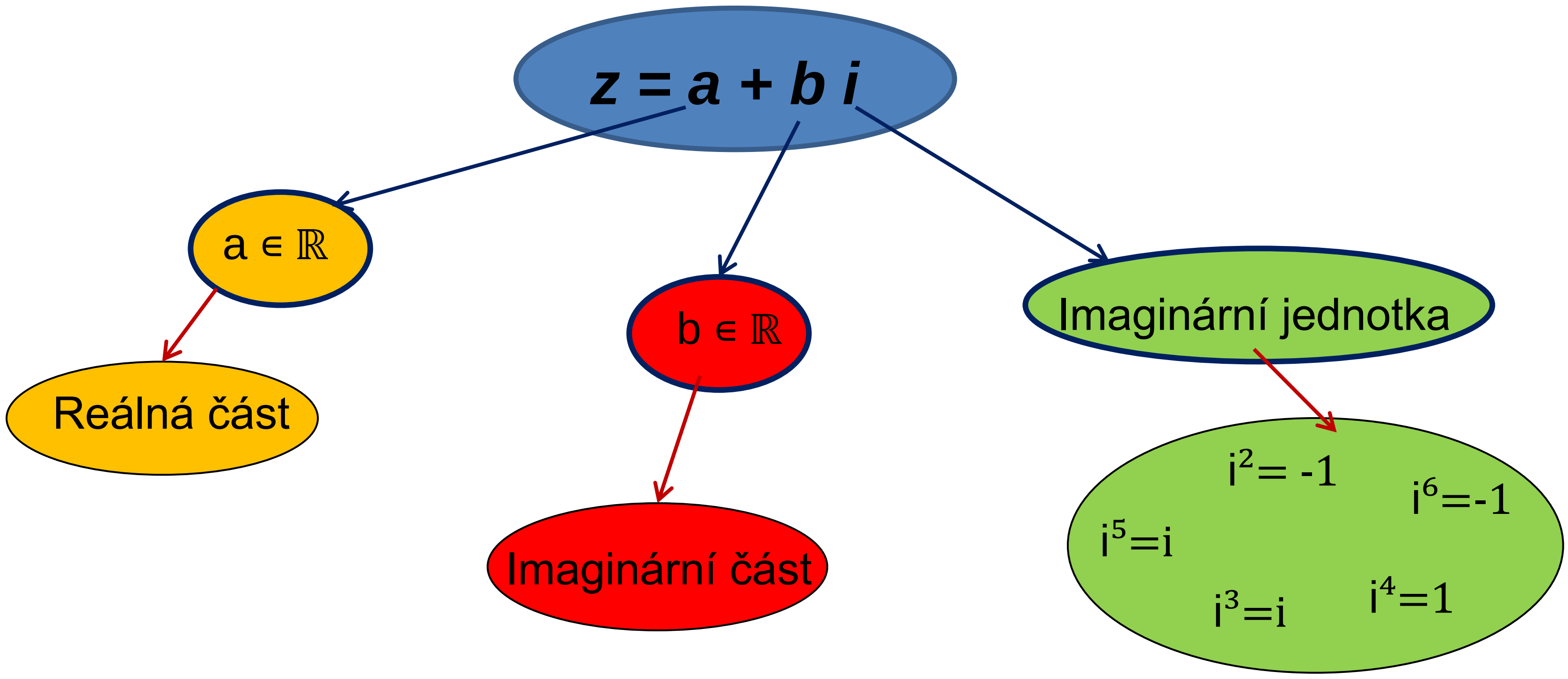
Komplexní čísla

Algebraický tvar komplexního čísla:



Typy komplexních čísel:

$$z = bi$$

Ryze imaginární číslo

příklad

z = - 5 i

z = 2i

$z = \sqrt[3]{5}\, i$

$$z = a$$

Reálné číslo

příklad

z = 3

$z = \sqrt{3}$

$z = \pi$

z = - 7

$$z = a + bi$$

Imaginární číslo

příklad

z = - 5 + 9 i

$z = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$

Operace s komplexními čísly:

Rovnost komplexních čísel:

Sčítání a odčítání komplexních čísel:

Příklad:

(3 + 2 i) + (4 – 3 i) = 3 + 2 i + 4 – 3 i = (3 + 4) + (2 – 3) i = 7 - i

(5 – 7 i) – (2 + 4 i) = 5 – 7 i – 2 – 4 i = (5 – 2) + (- 7 – 4) i = 3 – 11 i

Násobení komplexních čísel:

Příklad:

Dělení komplexních čísel:

Příklad:

Komplexní číslo: $z = a + bi$

Opačné komplexní číslo:

$-z = -a - bi$

Komplexně sdružené číslo:

$\bar{z} = a - bi$

Absolutní hodnota komplexního čísla:

$|z| = |-z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Komplexní jednotka – komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna 1.

Příklad:

Je dáno komplexní číslo. Určete číslo opačné a číslo komplexně sdružené.

$z = 2 + 3i \quad -z = -2 - 3i \quad \bar{z} = 2 - 3i$

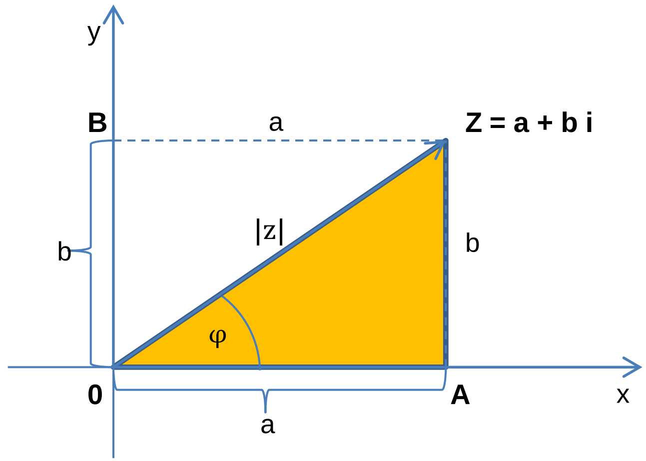
$z = 5 \quad -z = -5 \quad \bar{z} = 5$

$z = 7i \quad -z = -7i \quad \bar{z} = -7i$

$z = -4i \quad -z = 4i \quad \bar{z} = 4i$

Vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla a určete, zda je komplexní jednotkou

Obraz **Z** komplexního čísla z = a + bi v Gaussově rovině umožňuje vyjádřit komplexní číslo i v jiném tvaru.



Určujícími prvky jsou vzdálenost bodu **Z** od počátku a velikost orientovaného úhlu φ.

Číslo |z| je absolutní hodnota komplexního čísla

Úhel φ nazýváme argumentem komplexního čísla

Z obrázku můžeme z pravoúhlého trojúhelníku 0AZ vyjádřit tyto vztahy:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$$

Můžeme psát z = a + b i = |z| . (cos φ + i sin φ)

Goniometrický tvar komplexního čísla

Vztahy

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = |z|.\cos\varphi \qquad b = |z|.\sin\varphi$$

nazýváme **převodními vztahy** mezi algebraickým a goniometrickým tvarem komplexního čísla

Pozor

Zápisy čísel

$$z_1 = -2.\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \qquad z_2 = 2.\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_3 = \cos\frac{2}{3}\pi - i\sin\frac{2}{3}\pi \qquad z_4 = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{4}\pi$$

apod. **nejsou** zápisy komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Převod komplexního čísla z algebraického tvaru na goniometrický tvar

a) Užitím převodních vztahů nalezneme |z|, sin φ, cos φ

b) Z hodnot sin φ a cos φ určíme velikost argumentu φ

c) Zapíšeme tvar komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Příklad 1:

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo z = 1 + i

Řešení:

a) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\varphi \rangle 0 \wedge \sin\varphi \rangle 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ $\quad \varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle \wedge \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

c) $z = 1 + i = \sqrt{2} . \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$

Příklad 2:

Převeďte na goniometrický tvar komplexní číslo z = - 8 + 6 i

Řešení:

a) $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ $\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|} = -\frac{8}{10} = -0{,}8$ $\quad \sin\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{6}{10} = 0{,}6$

b) $\cos\varphi \langle 0 \wedge \sin\varphi \rangle 0 \Rightarrow \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ $\quad \varphi \in \left\langle \frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle \wedge \sin\varphi = 0{,}6 \Rightarrow \varphi = 143°8'$

c) $z = -8 + 6i = 10.(\cos 143°8' + i \sin 143°8')$

K výpočtu sin φ = 0,6 použijeme tabulky nebo kalkulačku. Získáme nejprve úhel α = 36°52´ patřící do I. Kvadrantu. Odtud pak φ = 180° - α = 143°8´.

Převod komplexního čísla z goniometrického tvaru na algebraický tvar

a) Nejprve vyjádříme číselně sin φ a cos φ

b) Dosadíme číselné hodnoty do původního tvaru komplexního čísla a upravíme na algebraický tvar

Příklad 3:

Převeďte komplexní číslo $z=2.\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$ z goniometrického tvaru na tvar algebraický.

Řešení:

a) $\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge\sin\frac{11}{6}\pi=-\frac{1}{2}$

b) $z=2.\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\sqrt{3}-i$

Příklad 4:

Převeďte komplexní číslo $z=5.(\cos 161°30'+i\sin 161°30')$ z goniometrického tvaru na tvar algebraický.

Řešení:

a) $\cos 161°30'=-0{,}9483\wedge\sin 161°30'=0{,}3173$

b) $z=5.(\cos 161°30'+i\sin 161°30')=5.(-0{,}9483+i.0{,}3173)=-4{,}7416+1{,}5865i$

Násobení a dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru

Pro součin a podíl nenulových komplexních čísel

$$z_1 = |z_1|.(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad z_2 = |z_2|.(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$ platí:

$$z_1 . z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Příklad 5:

Je dáno $z_1 = 2.\left(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi\right)$ $\quad z_2 = 1{,}5.\left(\cos\frac{1}{6}\pi + i\sin\frac{1}{6}\pi\right)$ Určete jejich součin a podíl

Řešení:

$$z_1 . z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) = 2.1{,}5.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] = 3.\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3.(0+i) = 3i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{2}{1{,}5}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{4}{3}.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{3}.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}i$$

Moivreova věta

Umožňuje jednoduché umocňování komplexních čísel

Pro každé komplexní číslo z = |z| . (cos φ + i sin φ) a n ∊ N platí:

$$z^n = |z|^n . (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

n-tá mocnina komplexního čísla

Příklad 6:

Vypočítejte z^{20} pro z = 1 + i

Řešení:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} . \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \right)$$

$$z^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} . \left(\cos\frac{20.\pi}{4} + i \sin\frac{20.\pi}{4} \right) = 2^{10} . (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = 2^{10} . (\cos \pi + i \sin \pi) = 2^{10} . (-1 + i\,0) = -1024$$